E.N.S.E.T. DURÉE : 4 heures Option A 3

Dans ce problème, la notation (u_n) désigne une suite réelle de premier terme u_0, c'est-à-dire une application de **N** dans **R**. Le réel u_n est dit terme général ou terme d'indice n.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont égales si, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n$.

On appelle somme de deux suites (u_n) et (v_n) la suite dont le terme d'indice n est $u_n + v_n$. On écrit :

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$

On appelle produit de la suite (u_n) par le réel λ la suite dont le terme d'indice n est λu_n. On écrit

$$\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$$

On donne des définitions analogues pour les suites (u_n), de premier terme u_1, applications de $\mathbf{N}^*$ dans **R**.

I

1° a étant un réel donné, on considère la matrice carrée A de type (2, 2) définie par :

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Déterminer A^2, A^3 puis A^n quel que soit n entier positif (on pourra raisonner par récurrence).

2° *a.* On considère l'ensemble S_2 des suites (u_n) réelles dont les deux premiers termes u_0 et u_1 sont arbitraires et dont les termes suivants vérifient la relation récurrente $\mathcal{R}$:

$$(\mathcal{R}) : \qquad u_n - 2a\,u_{n-1} + a^2\,u_{n-2} = 0 \qquad (n > 1)$$

On munit cet ensemble des opérations somme de 2 suites et produit d'une suite par un nombre réel. Montrer que S_2 est ainsi doté d'une structure d'espace vectoriel réel.

b. A tout couple de réels (α, β) on associe l'élément de S_2 défini par $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$. Montrer que si l'on pose $\varphi(\alpha, \beta) = (u_n)$ où (u_n) désigne la suite ainsi déterminée, on obtient une application linéaire φ de $\mathbf{R}^2$ dans S_2. Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire. En utilisant $\varphi(1, 0)$ et $\varphi(0, 1)$ montrer que S_2 est de dimension 2.

3° Pour toute suite (u_n) élément de S_2 on pose :

$$v_n = u_{n+1} - a u_n \qquad (n \geqslant 0)$$

Montrer que, si l'on considère les matrices colonnes $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, la relation de récurrence $\mathcal{R}$ peut être traduite par la relation matricielle :

$$\forall n \geqslant 1 \; : \; X_n = A X_{n-1}$$

où A est la matrice définie dans la première question.

Calculer X_n en utilisant A^n et X_0 et en déduire l'expression du terme général u_n en fonction de a, de n, de u_0 et de u_1.

Tournez la page S. V. P.

II

On reprend les mêmes considérations relativement à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

a étant un réel donné.

1° Montrer que A^n est définie par

$$\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

2° On considère l'ensemble S_3 des suites (u_n) à coefficients réels dont les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 sont arbitraires, les suivants étant déterminés par la relation de récurrence $\mathcal{R}$:

$$u_n - 3au_{n-1} + 3a^2u_{n-2} - a^3u_{n-3} = 0 \qquad (\forall n > 2)$$

Montrer que S_3 est doté d'une structure d'espace vectoriel réel de dimension 3.

3° On associe à (u_n) les suites (v_n) et (w_n) définies par

$$v_n = u_{n+1} - au_n \qquad n \geqslant 0$$
$$w_n = v_{n+1} - av_n \qquad n \geqslant 0$$

En utilisant la méthode indiquée dans (I, 3°), déterminer u_n à l'aide de a, de n et des trois premiers termes u_0, u_1, u_2.

4° Soit, plus généralement, une suite (u_n) à coefficients réels dont les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 sont arbitraires et dont les termes suivants sont déterminés par la relation $\mathcal{R}_{p,q,r}$ (où p, q, r sont trois réels donnés, $r \neq 0$)

$$\mathcal{R}_{p,q,r} : u_n + pu_{n-1} + qu_{n-2} + ru_{n-3} = 0 \qquad (n > 2)$$

a. Que peut-on dire de l'ensemble S de toutes ces suites?

b. On cherche à déterminer les suites de l'ensemble S telles que le terme général u_n soit du type $u_n = t^n$ où t est un certain nombre réel non nul. Montrer que, nécessairement, le nombre t est solution d'une équation du troisième degré que l'on formera. En déduire que dans S il existe au moins une suite dont le terme général est de ce type.

c. On suppose que le polynôme $P(\lambda)$ défini par :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r$$

admet trois racines réelles t_1, t_2, t_3 distinctes. Trouver l'expression générale du terme u_n d'une suite quelconque appartenant à S.

d. On suppose que le polynôme P(λ) défini précédemment admet la racine double a et la racine simple b.

Montrer que la suite (u_n) dont le terme général est défini par $u_n = na^{n-1}$ est un élément de S. Trouver dans ce cas l'expression générale du terme général d'une suite quelconque de S.

e. Que peut-on dire du cas particulier étudié dans les trois premières questions de cette deuxième partie?

5° On considère en particulier les suites (u_n) définies par la relation de récurrence $\mathcal{R}_{-1,0,r}$ (où r est un réel donné arbitraire différent de 0), plus précisément par :

$$u_n - u_{n-1} + ru_{n-3} = 0 \qquad (n \geqslant 3)$$

a. Discuter dans le cas où $0 < r \leqslant \frac{4}{27}$ la forme générale de u_n.

b. Calculer explicitement le terme général u_n de la suite de premier terme u_1 définie par :

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = \frac{4}{9} \quad , \quad u_3 = \frac{4}{27}$$

et par la relation de récurrence :

$$u_n - u_{n-1} + \frac{4}{27} u_{n-3} = 0 \qquad (n > 3)$$

III

On applique les résultats obtenus précédemment au problème de probabilité suivant :

On considère une suite d'épreuves indépendantes telles que chacune d'elles comporte seulement deux résultats possibles, l'un appelé succès, l'autre appelé échec. Pour chaque épreuve la probabilité du succès est $p\,(0 < p < 1)$ et la probabilité de l'échec est $q = 1 - p$. Relativement à cette suite d'épreuves, on considère la variable aléatoire X, pouvant prendre les valeurs entières $n \geqslant 2$, définie de la façon suivante :

« $X = n$ si et seulement si les deux épreuves n et $n-1$ donnent pour résultats deux succès, la suite des épreuves de rang inférieur ne comportant pas deux succès consécutifs. »

Autrement dit, n est le nombre d'épreuves *minimum* pour obtenir deux succès *consécutifs*.

On désigne par P_n la probabilité $P(X = n)$ et on pose $P_1 = 0$.

1° Calculer P_2, P_3, P_4.

2° En utilisant le résultat obtenu dans les $n-3$ premières épreuves, montrer que :

$$P_n = \left(1 - \sum_{1}^{n-3} P_i\right) qp^2 \qquad n > 3$$

3° Montrer que la suite (P_n) obéit à une relation de récurrence du type $\mathcal{R}_{-1,0,r}$ (à partir de $n > 3$) pour une valeur de r que l'on précisera.

4° Déterminer P_n lorsque $p = \frac{2}{3}$.

5° On suppose toujours $p = \frac{2}{3}$; montrer que les moments d'ordre quelconque de la variable aléatoire X existent et calculer l'espérance mathématique de X.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail